Club de Maths de l'Université de Nantes

Activités 2019-2020
premier semestre

Séance du 2 octobre 2019

C'est la séance inaugurale de la saison 2019-20. Après un petit mot sur la nature de ce club de maths et son caractère résolument informel, petit exposé sur le thème "Proportions et mesures courbes" pour esquisser la théorie des proportions dans l'Antiquité grecque puis expliquer le calcul de l'aire de la sphère par Archimède au IIe siècle avant JC.

Il est rappelé que ce club alternera avec les séances de *Math-o-LU* (organisé par François Sauvageot et Éric Paturel) dont les deux premières séances sont fixées aux 9 et 16 octobre. Prochaine séance du club : le mercredi 23 octobre.

Séances des 9 et 16 octobre 2019

Pas de séance en ces jours, en raison de Math-o-LU.

Séance du 23 octobre 2019

Les participants proposent à la réflexion commune les problèmes suivants :

Problème 2019-20(1). *Déterminer les fonctions (bijectives) $f : I \to I$ vérifiant $f' = f^{-1}$, où I est un intervalle réel.*

Problème 2019-20(2). *Avec les chiffres 1, 2, 4, 7 et 9 on veut former des nombres à cinq chiffres (tous différents) divisibles par 11 : combien y a-t-il de manière de disposer ces cinq chiffres ?*

Problème 2019-20(3). *Existe-t-il un entier dont le carré s'écrit uniquement avec les chiffres 0 et 1 ? Et plus précisément avec des chiffres 0 et trois cents chiffres 1 ?*

Problème 2019-20(4). *Décrire une méthode générale pour calculer les sommes $S_n^p = \sum_{k=1}^n k^p$.*

Problème 2019-20(5). *On se donne six points dans l'espace (affine réel de dimension 3) non alignés trois à trois, puis on relie ces points deux à deux par des segments que l'on colorie à l'aide de deux couleurs. Montrer qu'il y a au moins un triangle monochrome, et qu'il y en a même au moins deux.*

Séance du 30 octobre 2019

Pas de séance en ce jour, en raison des vacances.

<u>**Séance du 6 novembre 2019**</u>

On commence par deux nouveaux énoncés.

> **Problème 2019-20(6).** *On se donne trois boîtes A, B et C qui ont des "niveaux" $\in [\![1, 250]\!]$. Au niveau 1, A produit $10\,\$$, B produit $20\,\$$ et C produit $30\,\$$. Quand on augmente de niveau, la production est multipliée par $1,02$ pour A, par $1,03$ pour B, et par $1,04$ pour C ; mais ces productions sont multipliées par 2 lors des passages des niveaux 24 à 25, 49 à 50, 99 à 100 et 249 à 250. Il y a aussi des durées de production. Pour la boîte A : nivx $1-24$ durée $1'12''$, nivx $25-49$ durée $1'$, et on diminue de $12''$ à chaque seuil (*100 et 250*) ; pour la boîte B, on part d'une durée de $5'54''$ que l'on diminue d'$\frac{1}{6}(5'54'') = 59''$ à chaque seuil ; et pour la boîte C, on part d'une durée de $11'48''$ que l'on diminue d'$\frac{1}{6}(11'48'') = 1'48''$ à chaque seuil. Pour passer à un niveau supérieur, il faut dépenser de l'argent : pour la boîte A, il faut payer $1,02\,\$$, puis pour chaque niveau suivant, on multiplie par $1,02$; pour la boîte B, on démarre à $2,06\,\$$ puis on multiplie par $1,03$ pour chaque niveau suivant ; et pour la boîte C, on démarre à $3,12\,\$$ puis on multiplie par $1,04$ pour chaque niveau suivant.*
>
> *Notons S la valeur des gains accumulés (sans retrancher les dépenses). Tous les 3 millions de $\$$, on gagne une étoile ; les étoiles peuvent être investies dans la boîte pour augmenter la production de 5%, mais cela n'affecte que les gains.*
>
> *Combien faut-il au minimum de temps pour que $S \geq 10^{15}\,\$$? Dans ce jeu, le joueur peut choisir ses changements de niveau, et choisit d'utiliser ses étoiles (ou non), mais toutes les étoiles doivent être utilisées simultanément, ce qui remet tous les niveaux à 1 et le S à 0.*

> **Problème 2019-20(7).** *Combien y a-t-il de nombres à n chiffres pris dans $\{1, 2, 3\}$ et tels qu'il n'y ait pas deux chiffres 1 adjacents ?*

On revient ensuite sur le problème **(1)** du 23 octobre (l'équadiff $f' = f^{-1}$). Cette équadiff peut aussi s'écrire

$$(f \circ f)'(x) = x\, f'(x) \qquad \text{ou} \qquad (f^{-1})' = \frac{1}{f^{-1} \circ f^{-1}} \qquad \text{ou} \qquad f'' = \frac{1}{f' \circ f'}\,.$$

On fait aussi remarquer que pour que la fonction f soit bijective, cette fonction doit être monotone, et donc aussi convexe.

À tous les problèmes déjà posés, on ajoute encore un autre énoncé :

> **Problème 2019-20(8).** *Peut-on trouver deux fonctions f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f \circ g(x) = x^2$ et $g \circ f(x) = x^3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.* Conjecture : *c'est probablement impossible, mais il faudrait le justifier !*

On peut découpler ces deux équations en remarquant que cela entraîne que $f(x^3) = f(x)^2$ et $g(x^2) = x^3$, ... mais cela ne résout pas le problème !

On termine la séance en discutant le théorème de Borsuk-Ulam : *Si $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur la sphère euclidienne de dimension n, qui est définie comme $\mathbb{S}^n = \{\, x \in \mathbb{R}^{n+1}\,;\, \|x\| = 1 \,\}$, il existe au moins un $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = f(x)$.* On poursuit : y a-t-il d'autres énoncés plaisants de topologie ?

Séance du 13 novembre 2019

Pas de séance en ce jour, en raison de Math-o-LU.

Séance du 20 novembre 2019

On revient sur quelques problèmes posés lors des séances précédentes.

On commence par le problème **(7)** du 6 novembre. On propose un raisonnement par récurrence sur n : soient u_n le nombre de nombres à n chiffres pris parmi $\{1, 2, 3\}$ sans chiffres 1 consécutifs, et v_n le nombre de ces chiffres commençant par 1 ; on a les relations de récurrence

$$u_{n+1} = 3\, u_n - v_n \,, \qquad v_{n+1} = u_n - v_n \,,$$

$$\text{soit aussi} \qquad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \,.$$

Les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ci-dessus sont $\lambda = 1 \pm \sqrt{3}$, et avec

$$D = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} \,, \quad P = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \,, \quad P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3}+2 \\ 1 & \sqrt{3}-2 \end{pmatrix} \,,$$

on a $D = P^{-1} A\, P$, puis $A^n = P\, D^n P^{-1}$, et en prenant $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$ en sorte que $u_1 = 3$ et $v_1 = 1$, on trouve que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{3})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3}+2 \\ 1 & \sqrt{3}-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,,$$

soit finalement $u_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \big[(\sqrt{3}-2)(1-\sqrt{3})^n + (\sqrt{3}+2)(1+\sqrt{3})^n \big]$. ∎

On passe ensuite au problème **(3)** du 23 octobre (un carré s'écrivant avec le chiffre 0, et trois cents fois le chiffre 1). On utilise les congruences modulo 9 : ce carré serait donc congru à 3 modulo 9 ; or les carrés sont congrus modulo 9 à 0, 1, 4 ou 7. Il n'existe donc pas de carré comme demandé. ∎

On passe ensuite au problème **(2)** du 23 octobre (nombre de façons d'écrire un nombre de cinq chiffres imposés pour que ce soit divisible par 11). On utilise le critère de divisibilité par 11 : la somme des chiffres de rang impair moins la somme des chiffres de rang pair doit être divisible par 11, ou encore, la somme des chiffres de rang impair est congrue à la somme des chiffres de rang pair modulo 11. La somme de tous les chiffres donnés est égale à $23 \equiv 12[11]$, et donc les deux sommes considérées plus haut doivent être congrues à 6 modulo 11, et donc doivent valoir respectivement 6 et 17 ; pour obtenir 6, on ne peut guère le faire qu'avec $2 + 4$, et il faut donc que les chiffres de rang impair soient 1, 7 et 9, et les chiffres de rang pair 2 et 4 ; il y a donc 3! possibilités pour disposer les chiffres de rang impair et 2! possibilités pour les chiffres de rang pair, ce qui donne un nombre total égal à $(3!)(2!) = 12$. ∎

Puis on aborde la problème **(5)** du 23 octobre (segments de deux couleurs reliant six point de l'espace). Choisissons un sommet ; de ce sommet partent cinq arêtes, et donc au moins trois d'une même couleur, disons de couleur a. Les trois extrémités de ces trois arêtes de couleur a forment un triangle ; si les trois côtés de ce triangle sont de couleur $b \neq a$, c'est un triangle monochromatique de couleur b, tandis que si l'un de ces côtés est de couleur a, il forme avec le premier sommet choisi, un triangle monochromatique de couleur a. On a ainsi prouvé qu'il y a toujours au moins un triangle monochromatique.

Notons donc p_1, p_2, p_3 les trois sommets d'un triangle monochromatique, disons de couleur a, et q_1, q_2 et q_3 les trois autres sommets. On distingue alors plusieurs cas.

Premier cas : le triangle $(q_1q_2q_3)$ *est entièrement de couleur* a. Dans ce cas, ce triangle est un deuxième triangle monochromatique.

Deuxième cas : l'un des côtés de $(q_1q_2q_3)$, *disons* $[q_1q_2]$, *est de couleur* b. On considère alors les six arêtes reliant les sommets q_1 et q_2 aux sommets p_j du premier triangle, et on considère deux sous-cas :

Premier sous-cas : de q_1 *(ou de* q_2*) partent deux arêtes de couleur* a. Dans ce cas, ces deux arêtes, plus l'arête $[p_jp_k]$ qui ferme le triangle, constituent un deuxième triangle monochromatique de couleur a.

Deuxième sous-cas : de chacun des sommets q_1 *et* q_2 *partent au moins deux arêtes de couleur* b. Dans ce cas, comme les p_j sont au nombre de trois et que ces arêtes de couleur b sont au moins au nombre de quatre, il y en a deux qui arrivent au même sommet p_j, et ces deux arêtes, avec l'arête $[q_1q_2]$, constituent un deuxième triangle monochromatique, cette fois de couleur b. ∎

On termine la séance avec un nouvel énoncé.

> **Problème 2019-20(9).** *Un dictateur veut relier des villes ; de chaque ville partent au maximum trois destinations, et on veut que chaque paire de villes puisse être reliée avec au plus une correspondance. Combien de villes au maximum peut-on bâtir avec ces exigences ?*

Séances du 27 novembre et 4 décembre 2019

Pas de séance en ces jours, en raison de Math-o-LU.

Séance du 11 décembre 2019

On commence encore une fois par l'énoncé d'un nouveau problème.

> **Problème 2019-20(10).** *Étant donnée une suite* $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$, *on veut résoudre le système infini en inconnues* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$: $\forall j \in \mathbb{N}$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{jk}x_k = b_j$. *Il faut que les séries soient absolument convergentes, et on espère approcher ce problème par le problème tronqué de taille* $n \times n$.

On signale qu'il y a des solutions explicites lorsque $b_j \equiv 1$; ou lorsque $b_j = (-1)^j$; ou encore lorsque $b_0 = 1$ et $b_j = 0$ pour $j > 0$.

On discute ensuite du problème **(8)** du 6 novembre : $f \circ g(x) = x^2$, $g \circ f(x) = x^3$. On observe que $g(x^2) = (g(x))^3$ entraîne que $(g(-x))^3 = g(x)^3$ et donc que g doit être paire. On observe aussi que $f(x^3) = (f(x))^2$ entraîne que f est positive et que $f(-x^3) = f(-x)^2$. Par ailleurs, $g \circ f(x) = x^3$ prouve que g est surjective, et $f \circ g(x) = x^2$ montre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est surjective ; de plus f est injective car $f(x) = f(y)$ entraîne que $x^3 = y^3$ et donc que $x = y$, si bien que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$. De façon similaire, $g_{|\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}}$ est injective car pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $g(x) = g(y)$ entraîne que $x^2 = y^2$ et donc que $x = y$, si bien que $g_{|\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}}$ est bijective (et on peut compléter par parité pour $g_{|\mathbb{R}_- \to \mathbb{R}}$).

On a aussi $2^{2^n} = (f \circ g)^n(2) = f \circ (g \circ f)^{n-1} \circ g(2) = f\big(g(2)^{3^{n-1}}\big)$. Soit ; mais alors ? Même en les supposant continues peut-on conclure ? Oui, car pour que g soit bijective, elle doit être strictement monotone, ce qui n'est pas possible car l'image de g serait alors $]-\infty, g(0)]$ ou $[g(0), +\infty[$ au mieux, ce qui n'est pas surjectif. ■

Mais sans supposer la continuité ?

On termine la séance avec un nouvel énoncé.

> **Problème 2019-20(11).** *Peut-on truquer deux dés indépendants à six faces numérotées de 1 à 6 pour que la somme soit équirépartie sur $[\![2, 12]\!]$? Indication : utiliser des fonctions génératrices. Généralisation : considérer des dés à n faces avec n quelconque, et aussi le cas de plus de deux dés.*

Séance du 18 décembre 2019

Pas de séance en ce jour, en raison de Math-o-LU.

*

* * * *

*

Activités 2019-2020
deuxième semestre

Séance du 15 janvier 2020

On commence par exposer une solution partielle du problème **(9)** du 20 novembre (le dictateur et ses villes) : on commence par observer qu'on ne pourra certainement pas construire plus de dix villes, car de la ville 1 peuvent partir au maximum trois chemins desservant les villes 2, 3 et 4, et celles-ci desservent encore au plus deux autres villes chacune (numéros 5 à 10), si bien qu'avec une seule correspondance, la ville 1 ne peut être reliée qu'à au plus neuf autres villes. On donne ensuite une solution pour cinq villes, six villes, puis pour sept, et même pour huit. Donnons des représentations géométriques de ces solutions : (i) Pour cinq villes, représentons-les comme les cinq sommets d'une double pyramide à base triangulaire, en prenant comme chemins les six arêtes qui ne sont pas côtés de la face triangulaire commune ; (ii) Pour six villes, représentons-les comme les six sommets d'une double pyramide à base carrée (cette base ayant des sommets appelés a, b, c, d), en prenant comme chemins les quatre côtés $[ab]$, $[bc]$, $[cd]$ et $[da]$ de cette face commune, ainsi que les segments $[pa]$, $[pc]$, $[pq]$, $[qb]$ et $[qd]$ (p et q étant les deux derniers sommets) ; (iii) Pour sept villes, représentons-les comme les sept sommets d'une double pyramide à base pentagonale (cette base ayant des sommets appelés a, b, c, d, e), en prenant comme chemins les cinq côtés $[ab]$, $[bc]$, $[cd]$, $[de]$ et $[ea]$ de cette face commune, ainsi que les segments $[pa]$, $[pc]$, $[pq]$, $[qb]$ et $[qd]$ (p et q étant les deux derniers sommets). Pour toutes ces constructions, les vérifications sont faciles à effectuer.

Pour le cas de huit villes, on peut les représenter par les huit sommets d'un cube en prenant pour chemin les arêtes de ce cube, à l'exception de deux côtés parallèles d'une même face qui sont remplacés par les deux diagonales de cette face. La symétrie de cette représentation permet de vérifier facilement que chaque sommet peut être joint à chaque autre sommet avec au plus une correspondance.

La question qui reste est donc : le problème est-il possible avec neuf ou dix villes ?

Puis on pose un nouveau problème.

> **Problème 2019-20(12).** *Deux équipes A et B de n joueurs s'affrontent dans n jeux : à chaque tour chacun des n jeux doit être disputé entre un joueur de l'équipe A et un joueur de l'équipe B, et au bout de n tours, chacun des joueurs doit avoir disputé une partie de chacun des n jeux, et doit avoir rencontré chacun des joueurs de l'équipe adverse. Est-ce possible ? et pour quels n ?*

À l'évidence c'est possible pour $n = 1$; mais pour $n = 2$, si au premier tour a_1 affronte b_1 dans le jeu 1 et a_2 affronte b_2 dans le jeu 2, on voit qu'il est impossible d'organiser le deuxième tour, si bien que pour $n = 2$ le problème est impossible.

Séance du 22 janvier 2020

On revient à nouveau au problème **(9)** du 20 novembre (le dictateur et ses villes) : on a vu la semaine dernière que la construction était possible pour huit villes ou moins, et impossible pour onze villes ou plus, et qu'il restait donc à décider du résultat pour $n = 9$ et $n = 10$, ce que nous faisons cette semaine.

Dans le cas de neuf villes, quand on additionne le nombre de chemins partant de toutes les villes, on obtient le double du nombre total de chemins puisque chaque chemin relie deux villes ; cela prouve qu'il y a au moins une ville d'où partent moins de trois chemins, car s'il en partait trois de chacune des neuf villes, cela ferait un total de vingt-sept, qui n'est pas pair. Il y a donc au moins une ville qui n'est reliée de façon directe qu'à une ou deux autres villes, et donc qui n'est reliée qu'à six autres villes ou moins avec au plus une correspondance ; cette ville ne peut donc être reliée à chacune des huit autres villes avec au plus une correspondance. Autrement dit, le problème est insoluble pour neuf villes.

En revanche, il existe une solution dans le cas de dix villes. Représentons les dix villes comme les sommets d'un prisme droit à bases pentagonales, et prenons comme chemin reliant ces villes : (i) les cinq côtés du pentagone supérieur ; (ii) les cinq arêtes verticales reliant les sommets du pentagone supérieur à ceux du pentagone inférieur ; (iii) les cinq diagonales du pentagone inférieur. Grâce à la symétrie de cette construction, il est très facile de vérifier que chaque sommet peut être relié à chaque autre sommet avec au plus une correspondance. ∎

On discute ensuite le problème **(12)** du 15 janvier (deux équipes de n joueurs s'affrontent sur n jeux). On présente une solution dans le cas où n est impair. Dans ce cas, disposons les n jeux en cercle sur des emplacements fixes, et pour le premier tour disposons sur chacun de ces jeux un joueur de l'équipe A et un joueur de l'équipe B ; puis pour passer au tour suivant les joueurs de l'équipe A se décalent d'un cran en tournant dans le sens direct, tandis que les joueurs de l'équipe B se décalent d'un cran en tournant dans le sens rétrograde. Il est clair qu'en n tours, chaque joueur a ainsi visité les n jeux, et comme les équipes se décalent relativement l'une de l'autre de deux crans et que les effectifs sont impairs, chaque joueur de l'équipe A aura aussi rencontré chaque joueur de l'équipe B.

Et pour n pair ? Si l'on voulait utiliser le même procédé, en décalant l'équipe A de p crans, et l'équipe B de q crans, il faudrait que l'on ait simultanément $p \wedge n = 1$, $q \wedge n = 1$ et $(p+q) \wedge n = 1$; or si n est pair, $p \wedge n = 1$ entraîne que p est impair, et il faudrait donc à la fois p impair, q impair et $p+q$ impair, ce qui est clairement impossible. Si donc il y a une solution pour certains n pairs, ce ne pourra pas être suivant ce même procédé. On cherche alors à modéliser ce problème avec des permutations, mais c'est difficile à écrire.

On a vu que pour $n = 2$ le problème était impossible. Et pour $n = 4$? C'est possible ; en voici une solution :

	Tour numéro	1	2	3	4
Jeu numéro					
1		a_1b_1	a_4b_3	a_2b_4	a_3b_2
2		a_2b_2	a_3b_4	a_1b_3	a_4b_1
3		a_3b_3	a_2b_1	a_4b_2	a_1b_4
4		a_4b_4	a_1b_2	a_3b_1	a_2b_3

On conjecture que si on sait résoudre ce problème pour deux valeurs n et m, on sait aussi le résoudre pour $n \times m$: en gérant n blocs de m joueurs. Si cela est correct, on sait donc résoudre le problème pour tout n de la forme $n = 4^k p$ avec p impair.

On termine la séance avec le problème **(11)** du 11 décembre (les dés truqués) : on introduit les fonctions génératrices $G_Y(X) = a_6X^6 + a_5X^5 + a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X$, où $\mathbb{P}(X = n) = a_n$, et la même chose pour l'autre dé, soit $G_Z(X) = b_6X^6 + \ldots + b_1X$. Alors $G_{Y+Z}(X) = G_Y(X)G_Z(X) = \frac{1}{11}(X^{12} + X^{11} + \ldots + X^2)$. Certes, mais ensuite, que fait-on de cela ?

<u>Séance du 29 janvier 2020</u>

Retour sur le problème **(12)** du 22 janvier (deux équipes de n joueurs s'affrontent sur n jeux). On représente comme la semaine dernière les (éventuelles) solutions dans un carré $n \times n$ où chaque colonne représente un tour, et chaque ligne un jeu ; et il s'agit de distribuer les n^2 couples (a_j, b_k) de joueurs dans ces n^2 cases en sorte que dans chaque ligne et chaque colonne, chaque joueur apparaisse une fois et une seule. Euler a peut-être (?) étudié ce problème sous la dénomination de *carré gréco-latin*. La conjecture d'Euler serait alors qu'il est possible de trouver un tel arrangement sauf lorsque $n \equiv 2[4]$.

On explique alors un mode de production de *carrés latins orthogonaux* (en un sens pas très clair !) : dans un corps fini $\mathbb{F}$ à p^n éléments (avec $p > 2$ premier) notés a_j, on prend dans la ligne j les éléments $a_j x + b_1$, $a_j x + b_2$, … ; alors en changeant d'x, on tombe sur un autre carré latin orthogonal.

On revient alors au problème **(11)** du 11 décembre (les dés truqués), en oubliant l'indication !, et on étudie plusieurs cas :

1) <u>Cas de deux dés à n faces</u>. La loi du premier dé étant notée $(a_1, \ldots, a_n)$ et celle du deuxième $(b_1, \ldots, b_n)$, on note X et Y les résultats des deux dés, et $S = X + Y$ leur somme. Si S est équidistribuée, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2n-1} > 0$ pour tout $k \in [\![2, 2n]\!]$. Or $a_1 b_1 = \mathbb{P}(S = 2) = \mathbb{P}(S = n) = a_n b_n > 0$, et par ailleurs c'est aussi égal à $\mathbb{P}(S = 1 + n) \geq a_1 b_n + a_n b_1$ (on utilise ici que $n > 1$). On en déduit que $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$; puis on a aussi $a_1 b_1 \geq a_1 b_n + a_n b_1$, d'où

$$a_1(b_1 - b_n) \geq a_n b_1 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad b_1(a_1 - a_n) \geq a_1 b_n \geq 0 \ ,$$

ce qui entraîne que $b_1 \geq b_n$ et $a_1 \geq a_n$; de même, en partant de $a_n b_n \geq a_1 b_n + a_n b_1$, on obtient que $a_n \geq a_1$ et $b_n \geq b_1$, d'où finalement $a_1 = a_n =: a$ et $b_1 = b_n =: b$. On voit alors que $\mathbb{P}(S = 1 + n) \geq a_1 b_n + a_n b_1 = 2\,ab > ab = \mathbb{P}(S = 2) > 0$, ce qui contredit que S est équidistribuée. Le problème dans ce cas est donc impossible.

2) <u>Cas de $k > 1$ dés à $n > 1$ faces</u>. La loi du dé numéro j est maintenant notée $(a_{j1}, \ldots, a_{jn})$. Dans ce cas, on reprend le même raisonnement que dans le premier cas : $\prod_{j=1}^k a_{j1} = \mathbb{P}(S = k) = \frac{1}{kn+k-1} = \mathbb{P}(S = kn) = \prod_{j=1}^k a_{jn}$, et $\frac{1}{kn+k-1} = \mathbb{P}(S = k + n - 1) \geq \left(\prod_{j=1}^k a_{j1}\right)\left(\sum_{j=1}^k \frac{a_{jn}}{a_{j1}}\right)$, et aussi $\frac{1}{kn+k-1} = \mathbb{P}(S = kn - n + 1) \geq \left(\prod_{j=1}^k a_{jn}\right)\left(\sum_{j=1}^k \frac{a_{j1}}{a_{jn}}\right)$; on en déduit comme dans le premier cas que pour tout $j \leq k$ on a $a_{j1} = a_{jn} =: a_j$, puis que $\mathbb{P}(S = k + n - 1) \geq \frac{k}{kn+k-1} > \mathbb{P}(S = k)$, ce qui constitue une contradiction. Le problème est à nouveau impossible dans ce cas.

3) <u>Cas de deux dés ayant respectivement $m > 1$ faces et $n > m$ faces</u>. Il y a des situations où le problème peut être résolu. Typiquement lorsqu'il existe un entier k tel que $m \equiv 1[k]$ et $n \equiv k[m + k - 1]$ (voir exemples plus bas) ; en effet, il suffit de mettre pour le premier dé l'équiprobabilité sur les faces $\equiv 1[k]$ (et 0 sur les autres faces), et pour le deuxième dé l'équiprobabilité sur les faces $\equiv r[m+k-1]$ pour chaque $r \in [1, k]$ (et 0 sur les autres faces), car alors chaque somme n'a qu'une seule expression $X + Y$ de probabilité non nulle.

Exemples : si $m = 2$, on peut prendre n'importe quel n impair ; si $m = 3$, on peut prendre $n \equiv 1[3]$ ou $n \equiv 2[4]$, soit $n = 4$, 6, 7, 10, 13, 14, 16, etc. ; si $m = 4$, on peut prendre $n \equiv 1[4]$ ou $n \equiv 3[6]$, soit $n = 5$, 9, 13, 15, 17, 21, 25, 27, etc. ; si $m = 5$, on peut prendre $n = 6$, 8, 11, 12, 14, 16, 20, 21, 26, etc. ; si $m = 6$, prendre $n = 7$, 13, 15, 19, 25, 31, 35, etc.

4) Même cas que ci-dessus, mais échappant à la situation traitée. Le premier cas intéressant est $m = 2$ et n pair. Notant $\mathbb{P}(X = 1) = a > 0$ et donc $\mathbb{P}(X = 2) = 1-a = \lambda\, a \geq 0$ (avec donc $\lambda = a^{-1} - 1$), puis $\mathbb{P}(Y = 1) = b$; pour que $\mathbb{P}(X + Y = k) = ab(= \mathbb{P}(X + Y = 2))$ pour tout $k \in [2, n+1]$, on voit par récurrence que pour $k \leq n$ on doit avoir $\mathbb{P}(Y = k) = b \sum_{j=0}^{k-1} (-\lambda)^j$, et finalement que $(-\lambda)^{n+1} = 1$, ce qui est impossible si n est pair. ∎

Bien entendu, il reste encore des cas non traités !

On termine ensuite la séance en posant quatre nouveaux problèmes.

Problème 2019-20(13). *Un rail de chemin de fer rectiligne mesure* 5 km. *En maintenant fixes ses extrémités, on le rallonge d'*1 m, *si bien qu'il se courbe. On demande de quelle hauteur il s'est soulevé à mi-parcours.*

Si l'on néglige le poids, la forme est un arc de cercle, et c'est un problème de géométrie euclidienne élémentaire. Si l'on veut tenir compte du poids, il faut aussi modéliser l'élasticité, et là il faudrait préciser le problème !

Supposant donc que le rail prend une forme en arc de cercle, notons : $2\ell = 5\,000\,\mathrm{m}$ la longueur initiale du rail, $2\delta = 1\,\mathrm{m}$ la longueur ajoutée, r le rayon de courbure, $2\theta = 2(\ell+\delta)/r$ l'angle du secteur circulaire ainsi formé, et h la hauteur à déterminer. Le rayon de courbure est défini par l'équation $\ell/r = \sin\theta = \sin((\ell+\delta)/r)$ tandis que la hauteur à déterminer vaut $h = r - r\cos\theta = r\big(1 - \sqrt{1 - (\ell^2/r^2)}\big)$.

Ces équations ne peuvent se résoudre par des formules exactes, et comme $r >> \ell$, nous pouvons utiliser des développements limités : ainsi $h \simeq r\,\frac{1}{2}\,(\ell^2/r^2) = \ell^2/2r$, avec aussi

$$\frac{\ell}{r} \;=\; \sin\Big(\frac{\ell+\delta}{r}\Big) \;=\; \frac{\ell+\delta}{r} - \frac{\ell^3}{6\,r^3} + \mathcal{O}\Big(\frac{\delta\,\ell^2}{r^3}\Big)\,,$$

ce qui donne, en négligeant le $\mathcal{O}$, $\ell^4/r^2 \simeq 6\,\delta\,\ell$, puis finalement $h \simeq \frac{1}{2}\sqrt{6\,\delta\,\ell} \simeq 43,30\,\mathrm{m}$. ∎

Problème 2019-20(14). *On se donne n chaises numérotées et disposées en cercle, et n personnes également numérotées. Chaque personne s'assied sur une chaise, ce qui constitue une* configuration, *et on considère la transformation φ qui consiste à décaler toutes les personnes d'un cran en tournant dans le sens direct. On demande si pour toute configuration de départ, il existe un entier k tel que φ^k soit sans point fixe (personne n'est assis sur la chaise de même numéro).*

Problème 2019-20(15). *Un chirurgien dispose de deux paires de gants stériles et doit opérer trois patients. Pour chaque opération, il a besoin de ses deux mains, et doit commencer chaque opération avec des gants stériles : est-ce possible ?*

Problème 2019-20(16). *La monnaie d'un pays est constituée de quatre sortes de pièces : les pièces de* 84 *centimes, de* 132 *centimes, de* 231 *centimes et de* 308 *centimes. À partir de quelle somme est-on sûr de faire l'appoint ? ou plutôt : quelle est la plus grande somme pour laquelle on ne peut pas faire l'appoint ?*

Séances des 5 et 12 février 2020

Pas de séance en ces jours, en raison de Math-o-LU.

<u>Séance du 19 février 2020</u>

On nous propose pour cette séance un exposé sur l'axiome du choix.

L'axiome du choix. La lettre x désignant un ensemble appartenant à la classe X, une fonction de choix est une fonction F telle que $\forall x \in X,\ F(x) \in x$. Et l'axiome du choix affirme : *Tout ensemble X d'ensembles x non vides admet une fonction de choix.* Formulation équivalente : $(\forall i \in X,\ x_i \neq \emptyset) \ \Rightarrow\ \prod_{i\in X} x_i \neq \emptyset$. Ou encore : pour toute relation d'équivalence, il existe un ensemble de représentants des classes d'équivalence.

Autre formulation : le lemme de Zorn. Énoncé : *Si toute partie totalement ordonnée d'un ensemble ordonné X admet un majorant, alors cet ensemble X possède au moins un élément* maximal*, i.e. un élément $x \in X$ vérifiant : $\forall y \in X,\ x \leq y \ \Rightarrow\ x = y$.* Idée de la preuve de (choix $\Rightarrow$ Zorn) : soient $x_0 \in X$, puis $x_i = F(\{x \in X\,;\, \forall j < i,\ x_j < x\})$; il n'y a pas d'ensemble contenant tous les ordinaux.

Autre formulation : le théorème de Zermelo. Énoncé : *Sur tout ensemble, il existe un* bon ordre*, i.e. un ordre pour lequel toute partie non vide possède un plus petit élément.* Idée de la preuve de (Zorn $\Rightarrow$ Zermelo) : il s'agit de trouver un ensemble inductif où on dispose d'un élément maximal. Pour cela on utilise des *segments initiaux*, i.e. des $A \subset X$ tels que $(x \in X,\ a \in A$ et $x \leq a) \ \Rightarrow\ x \in A$. Cet élément maximal est alors forcément X tout entier car sinon, on pourrait construire quelque chose d'encore plus grand.

Pour fermer la boucle : Zermelo $\Rightarrow$ choix. Sur un ensemble X, soit $\leq$ le bon ordre. On pose alors $F(x) = \min_{y\in x} y$. Conclusion : les trois formulations sont équivalentes. Remarque : l'axiome du choix est traité à part des autres axiomes de ZF car il a des conséquences parfois un peu bizarres.

Une conséquences de l'axiome du choix : le théorème de Tychonoff. Énoncé : *Tout produit de compacts est compact.* On donne une idée de la preuve, qui utilise le critère de compacité d'Alexander (extraction de sous-recouvrement fini seulement sur une pré-base), et on conclut avec le lemme de Zorn.

Formes faibles de l'axiome du choix. En voici deux :
• L'axiome <u>du choix dépendant</u> : *On se donne X et une relation $\mathcal{R}$ sur X telle que $\forall x \in X$, $\exists y \in X$: $y\mathcal{R}x$; alors il existe une suite x_n vérifiant $x_{n+1}\mathcal{R}x_n$ pour tout n.*
• L'axiome <u>du choix dénombrable</u> : *Si (X_n) est une* suite *d'ensembles non vides, alors $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$.*
• Une conséquence, le théorème <u>de Baire</u> : *Dans tout espace métrique complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.* Pour la preuve, on utilise l'axiome du choix dépendant : soient (V_k) la famille dénombrable d'ouverts denses et U un ouvert non vide ; on fabrique une suite de boules emboîtées $B_n \subset \cap_{k\leq n} V_k \cap U$; la suite des centres étant de Cauchy elle converge vers un point $x \in \cap_{k\in\mathbb{N}} V_k \cap U$. En fait, le théorème de Baire est équivalent à l'axiome du choix dépendant.

Résumé des conclusions.

$$\begin{array}{ccc} & (\text{choix} \ \Leftrightarrow\ \text{Zermelo} & \Leftrightarrow \text{Zorn}) \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ (\text{Baire} \ \Leftrightarrow & \text{choix-dépendant}) & \text{Alexander} \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & \text{choix-dénombrable} & \text{Tychonoff} \end{array}$$

Séance du 26 février 2020

Pas de séance en ce jour, en raison des vacances.

Séance du 4 mars 2020

On discute le problème **(14)** du 29 janvier (personnes et chaises numérotées) : on représente la configuration initiale par une permutation σ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (la personne numéro j est assise sur la chaise numéro $\sigma(j)$) ; après décalage de k crans, la personne numéro j est assise sur la chaise numéro $\sigma(j)+k$. On demande si pour toute configuration de départ, il existe k tel que φ^k soit sans point fixe ; la négation de cela serait qu'il existe une configuration de départ telle que φ^k ait un point fixe pour tout k, autrement dit qu'il existe une permutation σ (représentant la configuration de départ) telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ il existe un $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $j = \sigma(j)+k$, ou dit encore autrement telle que $j \mapsto \sigma(j) - j$ soit bijective sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si $n = 2m$ est pair, c'est impossible car il est facile de voir que $\sum_{j=1}^{n} j \equiv m[n]$, ce qui entraîne que $\sum_{j=1}^{n}(j - \sigma(j)) \equiv 0[n]$ et donc que l'application précédente ne peut pas être bijective. Ainsi la réponse à la question dans le cas n pair est que : oui, pour toute configuration de départ, il existe k tel que φ^k soit sans point fixe.

Si maintenant $n = 2m+1$ est impair, on peut construite une permutation telle que $j \mapsto \sigma(j) - j$ soit bijective sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Par exemple pour $n = 3$ on prend $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, et plus généralement pour n impair, l'application $\sigma(j) = 2j$ est bijective sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et vérifie que $j \mapsto \sigma(j) - j = j$ est bijective aussi ! ∎

Puis on passe au problème **(15)** du 29 janvier (les gants de chirurgien) : chaque face de gant peut avoir trois états : 0 (face propre), 1 (face souillée par la main du chirurgien), 2 (face souillée par le sang de l'opéré), et on représente chaque paire de gants par un couple (face ext. , face int.). Première opération : le chirurgien enfile la paire 1, puis la paire 2 par-dessus ; à l'issue de cette opération, la paire 1 est dans l'état $(0,1)$ et la paire 2 dans l'état $(2,0)$. Deuxième opération : le chirurgien enlève la paire 2 et conserve la paire 1 (qui est propre à l'extérieur) ; à l'issue de cette opération, la paire 1 est dans l'état $(2,1)$ et la paire 2 est restée dans l'état $(2,0)$. Et pour la troisième opération, le chirurgien garde la paire 1 et réenfile la paire 2 *retournée*, c'est-à-dire dans l'état $(0,2)$ avec l'extérieur propre. ∎

Cette séance se conclut avec la discussion d'un nouveau problème.

> **Problème 2019-20(17).** *On se donne un système différentiel linéaire* 2×2 *de la forme* $X'(t) = A(t)X(t)$ *avec* $X(0) = I_2$*, et* $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix}$ *avec* $b(t) > 0$ *et* $c(t) > 0$*, ce qui garantit que* $X(t)$ *reste à coefficients* > 0 *pour tout* $t > 0$*. Pour toute matrice* M*, on note* $\rho(M) = \max|\lambda|$ *son rayon spectral et* $x(M) = \max \mathscr{Re}\,\lambda$ *(où les* max *sont pris sur les valeurs propres* λ *de* M*). Question : a-t-on nécessairement* $\frac{d}{dt}\ln(\rho(X(t))) \leq x(A(t))$ *pour tout* $t > 0$ *?*

Discussion : on sait déjà que $\frac{d}{dt}\ln(\text{dét}\,X(t)) = \operatorname{trace} A(t)$. Si $|\!|\!|\,.\,|\!|\!|$ est la norme subordonnée à une norme $\|\,.\,\|$ sur $\mathbb{R}^2$, on a $\frac{d}{dt}\ln\|X(t)u\| = \frac{(d/dt)\|X(t)u\|}{\|X(t)u\|} \leq \frac{\|A(t)X(t)u\|}{\|X(t)u\|} \leq |\!|\!|\,A(t)\,|\!|\!|$. On prend alors $\|u\| = 1$ pour obtenir $\frac{d}{dt}\ln|\!|\!|\,X(t)\,|\!|\!| \leq |\!|\!|\,A(t)\,|\!|\!|$, puis on utilise que $\rho(M) = \inf_{\|\,.\,\|}|\!|\!|\,M\,|\!|\!|$. Si A est une matrice constante, on a $X(t) = \exp(tA)$ ainsi que l'égalité $\frac{d}{dt}\ln(\rho(\exp(tA))) = x(A)$.

On a $\text{dét}(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - bc$ avec un discriminant Δ vérifiant $\Delta = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc = (a - d)^2 + 4bc > 0$, puis $\lambda = \frac{1}{2}(a + d) \pm \sqrt{\Delta}$ (ici, tout dépend de t). Si $\text{trace}(A) \geq 0$, alors $\rho(A) = x(A)$, tandis que si $\text{trace}(A) < 0$, alors $\rho(A) > x(A)$, et cette remarque vaut aussi pour $X(t)$. La conjecture initiale était que : $\forall t > 0, \ln \rho(X(t)) > 0$ entraîne que $\forall t > 0$, $\int_0^t x(A(s))\, ds > 0$.

Séance du 11 mars 2019

Pas de séance en ce jour, en raison de Math-o-LU.

Après cela, les séances sont brusquement interrompues
en raison de la crise sanitaire liée au Covid 19
(confinement à partir du 16 mars)

$*$

$* \quad * \quad * \quad *$

$*$

Bilan des activités 2019-2020

problèmes résolus et problèmes en suspens

Le problème **(1)** du 23 octobre 2019 a été un peu discuté le 6 novembre 2019, mais n'a jamais été résolu.

On peut cependant donner quelques solutions particulières. Sur $I = \mathbb{R}_+^*$ on peut chercher f sous la forme $f(x) = a\,x^b$ avec $a > 0$, et la condition $f' = f^{-1}$ se traduit alors par $b - 1 = 1/b$, $b > 0$ et $ab = a^{-1/b}$; on trouve ainsi $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} =: \phi$ (c'est le *nombre d'or*) puis $a = \phi^{1-\phi}$ ce qui donne une solution, que l'on peut aussi translater sur tout intervalle de la forme $]c, \infty[$. De même sur $I = \mathbb{R}_-^*$ on peut chercher f sous la forme $f(x) = a\,(-x)^b$ avec $a < 0$, et la condition $f' = f^{-1}$ se traduit alors par $b - 1 = 1/b$, $b < 0$ et $ab = (-a)^{1/b}$; on trouve cette fois $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \phi$ puis $a = -\phi^{-\phi}$ ce qui donne une nouvelle solution, que l'on peut ici aussi translater sur tout intervalle de la forme $]-\infty, c[$. $\blacksquare$

Le problème **(2)** du 23 octobre 2019 a été résolu le 20 novembre 2019.

Le problème **(3)** du 23 octobre 2019 a été résolu le 20 novembre 2019.

Le problème **(4)** du 23 octobre 2019 n'a jamais été discuté cette année, mais l'a été une année passée.

Le problème **(5)** du 23 octobre 2019 a été résolu le 20 novembre 2019.

Le problème **(6)** du 6 novembre 2019 n'a jamais été étudié.

Le problème **(7)** du 6 novembre 2019 a été résolu le 20 novembre 2019.

Le problème **(8)** du 6 novembre 2019 a été largement discuté le 11 décembre 2019 : il n'a été complètement résolu que dans le cas où les fonctions sont continues.

Le problème **(9)** du 20 novembre 2019 a été résolu les 15 et 22 janvier 2020.

Le problème **(10)** du 11 décembre 2019 a été brièvement discuté le jour même 11 décembre 2019, mais aucune idée n'a été trouvée.

Le problème **(11)** du 11 décembre 2019 a été résolu les 22 et 29 janvier 2020 dans un très grand nombre de cas ; mais il en reste pour lesquels la réponse n'a pas été trouvée.

Le problème **(12)** du 15 janvier 2020 a été en bonne partie résolu les 22 et 29 janvier 2020, mais il y a encore bien des cas où la réponse n'a pas été trouvée.

Le problème **(13)** du 29 janvier 2020 a été résolu le jour même 29 janvier 2020.

Le problème **(14)** du 29 janvier 2020 a été résolu le 4 mars 2020.

Le problème **(15)** du 29 janvier 2020 a été résolu le 4 mars 2020.

Le problème **(16)** du 29 janvier 2020 n'a jamais été discuté.

Voici cependant quelques éléments de réflexion. On ne pourra faire l'appoint que pour des sommes multiples du pgcd des sommes données ; pour que le problème ait une solution, il faut donc que les sommes données soient premières entre elles, ce qui est bien le cas ici puisque $84 = 7 \times 3 \times 2^2$, $132 = 11 \times 3 \times 2^2$, $231 = 11 \times 7 \times 3$, et $308 = 11 \times 7 \times 2^2$. Réciproquement, grâce à l'identité de Bezout, on voit facilement que pour des sommes premières entre elles, le problème admet toujours une solution.

Dans le cas où l'on a deux sommes vérifiant $m \wedge n = 1$, on vérifie assez facilement que la plus grosse somme pour laquelle il est impossible de faire l'appoint est donnée par la formule $s = mn - m - n$. Le problème général doit être plus compliqué.

Le problème **(17)** du 4 mars 2020 a été discuté le jour même 4 mars 2020, mais n'a pas pu être repris par la suite pour cause d'interruption du Club de Maths (crise du Covid 19).

*

* * * *

*